ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο "ΤΥΧΑΙΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ" ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

ΤΥΧΑΙΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

Ασκηση 1

Εστω ένα πείραμα πάνω στο στρίψιμο 3 ιδανικών νομισμάτων. Εστω επίσης, Y = πλήθος κορώνων που εμφανίζονται, τότε το Y είναι μια τ.μ. που παίρνει τις τιμές 0, 1, 2 και 3. Να βρείτε τις πιθανότητες $P(Y=0)$, $P(Y=1)$, $P(Y=2)$ και $P(Y=3)$.

ΛΥΣΗ

$$P(Y=0) = P(\{ΓΓΓ\}) = \frac{1}{8}$$

$$P(Y=1) = P(\{ΚΓΓ, ΓΚΓ, ΓΓΚ\}) = \frac{3}{8}$$

$$P(Y=2) = P(\{ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΓΚΚ\}) = \frac{3}{8}$$

$$P(Y=3) = P(\{ΚΚΚ\}) = \frac{1}{8}$$

Ασκηση 2

Τρείς μπάλες επιλέγονται δίχως επανάθεση από ένα κουτί με 20 μπάλες αριθμημένες από το 1 έως το 20. Ποια η πιθανότητα τουλάχιστον μια από τις τρεις όπου επιλέχθηκαν να έχει αριθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 17;

ΛΥΣΗ

Εστω X = ο μεγαλύτερος επιλεγμένος αριθμός. Τότε το X θα παίρνει μια από τις τιμές $3, 4, 5, \ldots, 20$. Ενώ, έπειτα επιλέγουμε $\binom{20}{3} = \|S\|$

Άρα, γενικά $P(X=i) = \frac{\|X=i\|}{\|S\|} = \frac{\binom{i-1}{2}}{\binom{20}{3}}$

$$P(x=20)=\frac{\binom{19}{2}}{\binom{20}{3}}=\frac{3}{20}$$

$$P(x=19)=\frac{\binom{18}{2}}{\binom{20}{3}}=\frac{51}{380}$$

$$P(x=18)=\frac{\binom{17}{2}}{\binom{20}{3}}=\frac{34}{285}$$

$$P(x=17)=\frac{\binom{16}{2}}{\binom{20}{3}}=\frac{2}{19}$$

$$P(x\geq 17)=P(x=20)+P(x=19)+P(x=18)+P(x=17)=\frac{3}{20}+\frac{51}{380}+\frac{34}{285}+\frac{2}{19}\approx 0{,}508.$$

Άσκηση 3η

Τρείς μπάλες επιλέγονται τυχαία από ένα κουτί με 3 λευκές 3 κόκκινες και 5 μαύρες μπάλες. Ας υποθέσουμε ότι κερδίζουμε 1€ για κάθε λευκή μπάλα και χάνουμε 1€ για κάθε κόκκινη μπάλα που επιλέγεται. Αν X το συνολικό ποσό που κερδίσαμε στο πείραμα, τότε ποιά η πιθανότητα το X μια τ.μ. που παίρνει τιμές $0, \pm1, \pm2, \pm3$;

ΛΥΣΗ

$3+3+5=11$ μπάλες

$$P(x=0)=\frac{\binom{5}{3}+\binom{3}{1}\cdot\binom{3}{1}\cdot\binom{5}{1}}{\binom{11}{3}}=\frac{55}{165}.$$

$$P(x=1)=\frac{\binom{5}{2}\cdot\binom{3}{1}+\binom{3}{2}\cdot\binom{3}{1}}{\binom{11}{3}}=\frac{39}{165}=P(x=-1)$$

$$P(x=2)=\frac{\binom{3}{2}\binom{5}{1}}{\binom{11}{3}}=\frac{15}{165}=P(x=-2)$$

$$P(x=3)=\frac{\binom{3}{3}}{\binom{11}{3}}=\frac{1}{165}=P(x=-3)$$

Τουτέστιν,

$$P(x=0 \text{ ή } x=\pm 1 \text{ ή } x=\pm 2 \text{ ή } x=\pm 3) =$$

$$= \sum_{i=0}^{3} P(x=i) + \sum_{i=1}^{3} P(x=-i) =$$

$$= \frac{55+39+15+1+1+15+39}{165} = 1$$

Άρα, η πιθανότητα να κερδίσουμε χρήματα είναι

$$\sum_{i=1}^{3} P(x=i) = \frac{55}{165} = \frac{1}{3}.$$